AREA: ESTADISTICA

EJE: PROCESOS MARKOVIANOS. SIMULACION

CADENAS DE MARKOV

Leonel Ganga, Becario de Investigación Consejo Interuniversitario Nacional (CIN) 1º Convocatoria 2011-2012, 2º Convocatoria 2012-2013, Facultad de Filosofía, Humanidades y Artes, Departamento de Matemática, UNSJ. leonelganga@gmail.com

RESUMEN

El presente trabajo tiene como objetivo simular Cadenas de Markov, las cuales son procesos estocásticos que verifican la propiedad de Markov, de solo depender de un estado inmediato anterior y no de todos los anteriores al estado dado. Se define la matriz de transición correspondiente a los estados y posteriormente se enuncian y demuestran resultados referidos a las propiedades que puede verificar una cadena de Markov con espacio de estados discreto, y por último se presentan algunos modelos de probabilidad simulados a partir del software R bajo una cadena de Markov.

***PALABRAS CLAVE*:** Cadenas de Markov, matriz de transición, simulación.

1.1 INTRODUCCIÓN

Sea $E = \{1,2,...,r\}$ un espacio de estados finito. Una matriz de transición en E es una matriz P, de dimensión $\boldsymbol{rxr}$ (la dimensión depende del número de estados), con coeficientes todos ≥ 0, y donde la suma de cada fila vale 1 (esto ocurre porque cada fila representa una distribución de probabilidad):

$$\boldsymbol{P = (p_{ij}), 1 \leq i, j \leq r \; y \; \forall i \in E, \sum j \in E p_{ij} = 1}$$

Una cadena de Markov sobre E con matriz de P es una sucesión $X = (X_0, X_1, X_2, ...)$ de variables aleatorias con índices en $\mathbb{N}$ y con valores en E tal que $\forall n \geq 0$, se verifica:

$$\boldsymbol{P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_l = i_l, 0 \leq l \leq n = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, P(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij}}$$

La primera igualdad expresa la propiedad de Markov la ley de X_{n+1} condicional al pasado (X_n, X_{n-1}, X_1, X_0) depende únicamente del estado del último instante

$X_n = i_n$: la i-ésima fila de P no es otra que la ley $(X_{n+1} | X_n = i)$. La segunda igualdad nos dice que estas transiciones son independientes de n; se dice que la cadena es homogénea. La formula de las probabilidades totales muestra que la ley de X está completamente caracterizada por P y por la ley inicial μ_0 $de\ X_0$ (denotada $X_0 \sim \mu_0$).

1.2 LEY INVARIANTE Y ERGODICIDAD

Uno de nuestros objetivos es la simulación de leyes de probabilidad π, formularemos esto de la siguiente manera: Sea π una probabilidad sobre E (es suficiente conocer π salvo un factor multiplicativo), el objetivo en sí, será: Determinar una transición P tal que:

$$\forall \boldsymbol{\mu_0}, \boldsymbol{\mu_0 P} \to \boldsymbol{\pi}$$

La selección de P puede realizarse bajo diferentes criterios, por ejemplo, la facilidad de construcción (cadena reversible), la menor complejidad algorítmica, o mejor aún la velocidad de convergencia. En lo que respecta a velocidad, las respuestas teóricas que tienen un interés practico para la selección efectiva de P son más bien raras, salvo en casos muy particulares donde la velocidad puede ser factorizada con precisión Si una convergencia de este tipo tiene lugar, $\boldsymbol{\mu_o P^{n+1}} \to \boldsymbol{\pi P}$, pero también se tiene que $\boldsymbol{\mu_o P^{n+1}} \to \boldsymbol{\pi\pi}$ verifica entonces necesariamente la condición:

$$\boldsymbol{\pi = \pi P}$$

Una probabilidad $\boldsymbol{\pi}$, que verifica lo anterior, es una medida invariante para $\boldsymbol{P}$. En efecto, si X_0 tiene distribución $\boldsymbol{\pi}$, X_n también tiene distribución $\boldsymbol{\pi}$ para todo $n \geq 0$. Veremos que si P es irreducible, tal medida invariante existe y es única (caso E finito). Pero esto no es suficiente para garantizar la ergodicidad.

1.2.1. CADENA IRREDUCIBLE: EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA MEDIDA INVARIANTE

La transición P es irreducible si, para todo par $(i,j) \in E^2$, existe un entero

$n(i,j) \geq 1\, t.q\, P^{n(i,j)}(i,j) > 0$. En la practica, estableceremos la irreductibilidad al proponer, para todo (i,j), un camino $C\,(i,j)\; de\; i\; hacia\; j\;\; (i \to j)$, de longitud $n(i,j)$ realizable con una probabilidad > 0:

$$\boldsymbol{C\,(i,j): i = i_1 \to i_2 \to i_3 \to \ldots \to i_{n(i,j)} = j}$$

con $p_{i_l}, p_{i_{l+1}}$para $l = 1,\; n(i,j) - 1$. Se dice entonces que el estado i se comunica con el estado j. Una condición de irreductibilidad fuerte se cumple cuando se pueden seleccionar un mismo $k = n(i,j)$ común a todos los $(i,j) \in E^2$: todos los estados se comunican a través de caminos de la misma longitud k. Se dice entonces que la transición es regular (o que P es primitiva), P^ktiene todos sus términos> 0. Veremos que para E finito: $\boldsymbol{P\; Regular \Leftrightarrow erg\acute{o}dica}$.

2. LA SIMULACION CON CADENAS DE MARKOV

La idea es simular π aproximadamente como una distribución límite de una cadena de Markov ergódica X de transición P. Esto implica:

1. Proponer una transición P sobre E tal que $\pi P = \pi$ (P es π invariante)
2. Asegurar la ergodicidad de la cadena: $vP^n \to \pi$
3. Saber a partir de que valor n_0 se puede decir que para $n \geq n_0$, vP^n está cercana de π

Resumamos las propiedades que debe verificar la transición P:

1. P es π invariante
2. P es irreducible y aperiódica

3. RESULTADOS

3.1 (Teorema) Si P es irreducible y E es finito, existe una única medida invariante π tal que $\pi > 0$, es decir: $\forall i \in E, \pi_i > 0$

Demostración del Resultado Anterior:

Mostremos que cada $\pi_i > 0$. Puesto que P es irreducible, $\exists\, l$ t.q. $A = (I + P)^l$

> 0 (tomar $l = \sup_{i,j} n(i, j)$).

Entonces $0 < \pi A = 2^l \pi$, es
decir >0.

Si $uP = u$, verifiquemos que u tiene todas sus coordenadas del mismo signo. Hemos visto que para un tal u, $|u|P = |u|$, y entonces $u^+ = {}^1 (u + |u|)$ es también autovector de P asociado a 1. Se presentan dos casos: (i)$u^+ = 0$ y entonces $u \leq 0$; (ii)$u^+ = 0$. $u^+ > 0$ y por consiguiente $u > 0$.

Sean π y π^0 dos medidas invariantes; $u = \pi - \pi^0$ es el autovector asociado. Como consecuencia del ítem anterior, esto no es posible a no ser que $u = 0$: luego, hay unicidad de la medida invariante.

3.2 Programas en R

Generación de una cadena de Markov en R

Código de Implementación en R

```
library(base);


GenerateMarkovChain<-function(S, P, mu0,cant)
{
	library(base);
	s0<-Iniciazion(S, mu0);
	print(s0);
	si<-Actualizacion(S,P,s0[[2]]);
	print(si);
	for(i in 1:(cant-1))
	{
		cat("________________Repeticion Nro ",i,"________________________","\n")
		si<-Actualizacion(S,P,si[[2]]);
		print(si);
```

```
        }
}

Iniciazion<-function(S, mu0)
{
library(base);
listo<-FALSE;
si<-NULL;
#obtengo el numero aleatorio.
  x<-runif(n=1,min=0,max=1);

#busco en el vector de probabilidades iniciales
#verificamos que x este entre 0 y el primer mu0 (probabilidad del primer elemento)

  if((x>0)&&(x<mu0[1]))
        {#se selecciono el primer elemento
                si<-1;
                listo<-TRUE;
        }
        if(!listo)
        {#no es el primer elemento, seguimos buscando
                for(i in 2:length(mu0))
                        {#cat("mu0[i]<x: ",mu0[i]<x);
                                if((x > mu0[i-1])&&( x < mu0[i]))
                                        {si<-(i); break;}
                                else {next;}
                        }
```

```
	}
state<-list(S[si],si);
state;
}

Actualizacion<-function(S, P, si)
{
#cat("Actualizacion_si: ",si,"\n")
#cat("length(P[si,])",length(P[si,]),"\n")
#	cat(P,"\n")
	listo<-FALSE;



#obtenemos el numero aleatorio que sera oficiador
	x<-runif(n=1,min=0,max=1);

#buscamos los valores de probabilidades. no es necesario preguntar por el cero
#se pregunta con fines aclaratorios

	if((x>0)&&(x<P[si,1]))
	{#se selecciono el primer elemento
		si<-1;
		listo<-TRUE;
	}
	if(!listo)
	{
		for(i in 2:length(P[si,]))
```

```
            {
                        if((x>P[si,i-1])&&(x<P[si,i]))
                                    {si<-(i); break;}
                        else {next;}
            }
      }
state<-list(S[si],si);
state;
}


ObtenerEstado<-function(){}
ObtenerUbicacionEstado<-function(){}
```

4. CONCLUSIONES

Se ha logrado programar algoritmos de cadenas de Markov en R, ya que hasta el momento y en función de la bibliografía consultada, se habían programado algunos algoritmos de cadenas pero en otros lenguajes de programación. Este trabajo es el resultado del primer año como becario de investigación del CIN, en este segundo año se pretende profundizar sobre los procesos markovianos, continuando con el trabajo de simulación de algoritmos.

5. BIBLIOGRAFIA

FRIGESSI, A. y PICCIONI, M. (1988). *Parameter estimation for the two-dimensional Ising fields corrupted by Boise, Quaderno, IAC-CNR, Roma.*

BUSTOS, O. H. y FRERY, A. C. (1982). *A contribution to the study of markovian degraded images: an extensión of a theorem by Geman and Geman*, Computational & Applied Mathematics, 11, pags. 17-29.

BUSTOS, O. (2009). *Introducción a los procesos markovianos en el análisis y procesamiento de imágenes*, X Congreso Dr. Antonio Monteiro, Bahia Blanca, Argentina.

DUÑO, M. (1997). *Random Iterative Models*, Springer, New York.

GAETAN, C. and GUYON, X. (2010). *Spatial Statistics and Modeling*, Springer, New York.

GEMAN, S. and GEMAN, D. (1984). *Stochastic relaxation, Gibbs distribution, and the bayesian restoration of images*, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., PAMI 6, pags. 721-741.

GUYON, X (1999). *Métodos Numéricos por Cadenas de Markov*, Escuela Venezolana de Matemáticas.

HAGGSTROM, O. (2002).*Finite Markov Chains and Algorithmic Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.

MEYN, S.P. and TWEEDIE, R. L. (1993). *Markov Chain and Stochastic Stability*, Springer, New York.

YCART, B. (2002). *Modèles et algorithmes markoviens*, Mathématics et Applications, Springer, Paris.